

Rappresentazione dei numeri

Antonella Santone

Anno Accademico 2008/2009

1

Rappresentazione dei numeri

- ❖ Naturali
- ❖ **Interi**
- ❖ Reali

2

Interi

- ❖ Includono i naturali, lo zero e tutti i valori negativi della forma $-n$, essendo n un naturale
- ❖ La rappresentazione dei numeri interi in un elaboratore pone alcuni problemi:
 - ❖ Come rappresentare il "segno meno"
 - ❖ Come eseguire le operazioni in modo efficiente

L'esecuzione delle operazioni aritmetiche è un'operazione frequentissima: se fosse inefficiente l'efficienza complessiva della macchina ne risentirebbe.

3

Interi (cont.)

Opposto $\bar{n} = -n$
 $\bar{n} + n = 0$

Complementazione
Operazione che trasforma un numero nel suo opposto

Sottrazione
somma + complementazione

$$n_1 - n_2 = n_1 + \bar{n}_2$$

4

Varie rappresentazioni

- ❖ **Modulo & Segno**
- ❖ Complemento alla base
- ❖ ...

5

Modulo & Segno

- ❖ Usa un bit per rappresentare esplicitamente il segno
 - 0 = numero positivo
 - 1 = numero negativo
- ❖ Usa gli altri bit disponibili per rappresentare il modulo

6

Definizione di modulo

$$|n| = \begin{cases} n & \text{se } n \geq 0 \\ -n & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

è un naturale: sappiamo rappresentarlo

7

Rappresentazione in M&S

$$\rho_B(n) = \begin{cases} \langle 0, \rho_B(|n|) \rangle & \text{se } n \geq 0 \\ \langle 1, \rho_B(|n|) \rangle & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

bit di segno

8

Osservazione

Da ora in poi consideriamo solo $B=2$

9

Esempio

$$p = 3$$

$$\rho_2(-3) = \langle 1, \rho_2(3) \rangle = \langle 1, 11 \rangle = 111_2$$

$$\rho_2(3) = \langle 0, \rho_2(3) \rangle = \langle 0, 11 \rangle = 011_2$$

10

Dato un numero rappresentato in M&S, che numero intero rappresenta?

$$s = c_{p-1} \dots c_0 \rightarrow i?$$

Calcoliamo il numero naturale corrispondente alla stringa: $c_{p-2} \dots c_0$

$$c_{p-2} \dots c_0 \rightarrow n$$

Lo sappiamo fare!!

$$c_{p-1} \dots c_0 = \begin{cases} n & \text{se } c_{p-1} = 0 \\ -n & \text{se } c_{p-1} = 1 \end{cases}$$

11

Caratteristica

000	
001	positivi
010	
011	
<hr style="border: 1px solid red;"/>	
100	
101	negativi
110	
111	

12

Tabella riassuntiva

Modulo & segno	Interi sistema decimale
000	0
001	1
010	2
011	3
100	-0
101	-1
110	-2
111	-3

$$p = 3$$
$$[-(2^{p-1}-1) \dots 2^{p-1} - 1]$$
$$[-3 \dots 3]$$

2 rappresentazioni per lo zero

13

Esempio

Data la stringa

$$1111_2$$

Naturale \rightarrow

$$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 = 15$$

Intero rappresentato in M&S \rightarrow

$$-(1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1) = -7$$

14

Esercizio

Rappresentare in M&S il numero intero
 -9

Data la stringa 11101_2 , che numero intero rappresenta?

15

Soluzione

$$-9_{10} = 11001$$

$$11101_2 = -13$$

16

Operazioni

❖ Complementazione

- ❖ Somma
- ❖ Sottrazione
- ❖ Moltiplicazione
- ❖ Divisione

17

Complementazione

$$s = c_{p-1} c_{p-2} \dots c_0_2$$

$$\bar{s} = \begin{cases} 0 c_{p-2} \dots c_0_2 & \text{se } c_{p-1} = 1 \\ 1 c_{p-2} \dots c_0_2 & \text{se } c_{p-1} = 0 \end{cases}$$

Basta prendere il bit + significativo e:

- se è uno diventa zero;
- se è zero diventa uno.

18

Operazioni

❖ Complementazione

❖ **Somma**

❖ Sottrazione

❖ Moltiplicazione

❖ Divisione

19

Somma informale

Siano i_1 e i_2 due interi:

se hanno lo stesso segno:

la somma avrà lo stesso segno e come modulo, la somma dei moduli (es. $-6-5 = -11$)

se hanno segno diverso e moduli diversi:

la somma avrà il segno del modulo maggiore e come modulo la differenza dei moduli (es. $-6+5 = -1$)

se hanno segno opposto e modulo uguale:

la somma avrà come segno + e come modulo 0 (es. $-5+5 = +0$)

20

Somma formale

Sappiamo fare:
numeri naturali

$$s = \underbrace{c_{p-1}}_{\text{seg}} \underbrace{c_{p-2} \dots c_0}_n$$

$$s' = \underbrace{c'_{p-1}}_{\text{seg}' } \underbrace{c'_{p-2} \dots c'_0}_{n'}$$

$$s+s' = \begin{cases} \langle \text{seg}, n+n' \rangle & \text{se } \text{seg} = \text{seg}' \\ \langle \text{seg}, n-n' \rangle & \text{se } \text{seg} \neq \text{seg}' \text{ e } n > n' \\ \langle \text{seg}', n'-n \rangle & \text{se } \text{seg} \neq \text{seg}' \text{ e } n' > n \\ \langle +, 0 \rangle & \text{se } \text{seg} \neq \text{seg}' \text{ e } n' = n \end{cases}$$

21

Analisi

❖ Per fare la somma serve un sottrattore

❖ Il sommatore lavora solo su $p-1$ bit e se il riporto $r_{p-1} = 1 \rightarrow$ overflow

22

Esempi

$$p = 4 \quad [-(2^{p-1}-1) \dots 2^{p-1}-1] \quad [-7..7]$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ + \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ = \\ \hline ? \end{array}$$

lavorare sui moduli:
in questo caso fare la somma
(stesso segno)

$$\begin{array}{r} \text{no overflow} \rightarrow 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ + \\ 0 \ 1 \ 1 \ = \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \end{array}$$

In decimale

risultato

$$-4 - 3 = -7$$

1 1 1 1
bit di segno

23

Esempi (cont.)

$$p = 4 \quad [-7..7]$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ + \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ \hline ? \end{array}$$

lavorare sui moduli:
in questo caso fare la somma
(stesso segno)

$$\begin{array}{r} \text{si overflow} \rightarrow 1 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ + \\ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

la somma non è rappresentabile su 4 bit

24

Esempi (cont.)

$p = 4$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ + \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ = \\ \hline ? \end{array}$$

lavorare sui moduli:
in questo caso fare la sottrazione
(segno diverso)

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ - \\ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \end{array}$$

risultato

0 0 1 0

bit di segno =
bit dell'intero con modulo maggiore

25

Operazioni

- ❖ Complementazione
- ❖ Somma
- ❖ Sottrazione
- ❖ Moltiplicazione
- ❖ Divisione

26

Sottrazione

In modo analogo alla somma

27

Operazioni

- ❖ Complementazione
- ❖ Somma
- ❖ Sottrazione
- ❖ Moltiplicazione
- ❖ Divisione

28

Moltiplicazione e Divisione

Lavorare sui moduli e studiare separatamente il segno:

Operandi concordi

- - ➡ segno: 0

+ +

Operandi discordi

- + ➡ segno: 1

+ -

29

Esempio

$p = 3$

risultato su $p = 6$

lavorare sui moduli

Operandi discordi:

Segno: 1

risultato

1 0 0 1 1 0

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ * \\ 0 \ 1 \ 1 \ = \\ \hline ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ * \\ 1 \ 1 \ = \\ \hline 1 \ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

estendere con zero, perché
risultato deve essere su 6

30

Vantaggi e svantaggi del M&S

Vantaggio

coincide con la nostra usuale rappresentazione

Svantaggio

richiede il trattamento separato di segno e modulo:
algoritmi aritmetici più pesanti ...

... nei calcolatori, per ovviare agli svantaggi
dell'aritmetica della rappresentazione in segno e
modulo, si adottano altre rappresentazioni ...

31

Esercizi

... modulo e segno

32

Esercizio

1. Rappresentare -5 e -8 su 4 bit.
2. Date le seguenti stringhe di bit

110_2
 110001_2
 0110_2

Quali interi rappresentano?

33

Soluzione

$-5 = 1101$
 $-8 = 11000$ → non è rappresentabile su 4 bit

 110 → -2
 110001 → -17
 0110 → $+6$

34

Siano date le sequenze di bit:

$A = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0$
 $B = 0\ 1\ 1\ 1$
 $C = 1\ 0\ 1\ 0$

Sapendo che tali sequenze siano la rappresentazione di tre numeri
 a , b , c , rispettivamente, ricavare tali numeri nei seguenti casi:

1. a , b , c sono numeri naturali;
2. a , b , c sono numeri interi e la macchina usa la rappresentazione
in modulo e segno;

Dire, nei due casi sopra citati, l'esito dell'operazione:

$$(A / B) + C$$

sapendo di avere a disposizione solo 4 bit per il risultato e per il
quoziente della divisione.

Soluzione: naturali

$a = 170$
 $b = 7$
 $c = 10$
 $(A / B) + C$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

OVERFLOW

36

Soluzione: M&S

a = -42
b = 7
c = -2

(A / B)

lavorare sui moduli

Operandi discordi:

Segno: 1

37

Soluzione: M&S

(A / B)

7 bit	0 1 0 1 0 1 0	1 1 1	1 1 1	3 bit
	0 0 0 1 1 1	1 1 1	0 0 0	
	0 0 0 0 0			

NO OVERFLOW

(A / B) = 1 1 1 0

bit di segno

38

Soluzione: M&S

(A / B) + C

(A / B) = 1110
C = 1010

lavorare sui moduli:

in questo caso fare la somma
(stesso segno)

OVERFLOW

1	1			
1	1	0	+	
0	1	0	=	
0	0	0		

39

Varie rappresentazioni

❖ Modulo & segno

❖ Complemento alla base

❖ ...

40

Rappresentazione in complemento alla base

$$\rho_B(n) = \begin{cases} \rho_B(|n|) & \text{se } n \geq 0 \\ \rho_B(B^p - |n|) & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

L'opposto di n è $B^p - n$:
 $n + \overline{n} = B^p$

41

Esempio

B = 2

p = 3

$\rho_2(-3) = \rho_2(2^3 - 3) = \rho_2(8 - 3) = \rho_2(5)$
= 101

$\rho_2(3) = \rho_2(3)$
= 011

Vale che: $\rho_B(n) + \rho_B(\overline{n}) = \rho_B(B^p)$

1	1	1	
1	0	1	+
0	1	1	=
0	0	0	

↑
su p+1 cifre

42

Intervallo di rappresentazione

$$I_{\text{rapp}} = [-2^{p-1} \dots 2^{p-1} - 1]$$

lo zero ha una sola rappresentazione

43

Dato un numero rappresentato in complemento alla base, che numero intero rappresenta?

$$s = c_{p-1} \dots c_0 \rightarrow i?$$

Calcoliamo il numero naturale corrispondente alla stringa: $c_{p-1} \dots c_0 \rightarrow n$

Lo sappiamo fare!!

$$c_{p-1} \dots c_0 = \begin{cases} n & \text{se } c_{p-1} = 0 \text{ (oppure se } n \in I_{\text{rapp}}) \\ -(B^p - n) & \text{se } c_{p-1} = 1 \text{ (oppure se } n \notin I_{\text{rapp}}) \end{cases}$$

44

Caratteristica

000	
001	positivi
010	
011	
<hr/>	
100	
101	negativi
110	
111	

45

Tabella riassuntiva

Complemento alla base	Interi sistema decimale
100	-4 - (8-4)
101	-3 - (8-5)
110	-2 - (8-6)
111	-1 - (8-7)
000	0
001	1
010	2
011	3

$$p = 3$$

$$[-2^{p-1} \dots 2^{p-1} - 1]$$

$$[-4 \dots 3]$$

una rappresentazione per lo zero \rightarrow asimmetria dell'intervallo
 (tanti neg quanti pos + una rappresentazione per lo zero in contrasto con 2^p che è pari)

46

Propagazione del segno

$$110 \rightarrow -(2^3 - 6) = -2$$

$$-2 = 110$$

$$2 = 010$$

Come si rappresentano su 5 bit??

Basta propagare il segno:

$$-2 = 11110 = -(2^5 - 30)$$

$$2 = 00010$$

47

101?

Naturale

5

Modulo & Segno

-1

Complemento alla base

-3 - (8 - 5)

48

Operazioni

❖ Complementazione

- ❖ Somma
- ❖ Sottrazione
- ❖ Moltiplicazione
- ❖ Divisione

49

Complementazione

$$\begin{aligned}n + \bar{n} &= 2^p \\ \bar{n} &= 2^p - n \\ &= (2^p - 1) - n + 1 \\ &= \text{1111...1 (p volte)} - n + 1\end{aligned}$$

Sottrarre $(2^p - 1) - n$ significa negare (invertire 0→1 ed 1→0) tutti i bit di n quindi sommare 1

$$\begin{array}{r}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ - \\0\ 1\ 0\ 0\ 1\ = \\ \hline1\ 0\ 1\ 1\ 0\end{array}$$

Complementazione:

- ❖ si negano i bit
- ❖ si somma 1

50

Complementazione: esempio

01100

- ❖ Primo passo: si negano i bit, ottenendo 10011
- ❖ Secondo passo: si somma 1, ottenendo 10100

Quindi $\overline{01100} = 10100$

Infatti:

01100 → 12

10100 → -(32 - 20) = -12

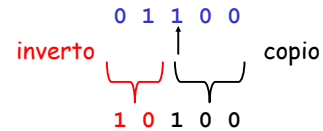
51

...quindi

L'opposto di 01100 è 10100

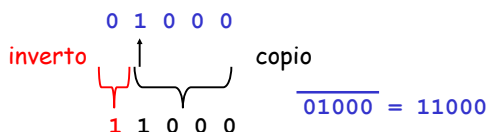
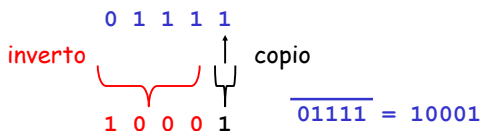
Un'altra regola equivalente è:

La rappresentazione dell'opposto di un numero intero in complemento alla base si ottiene ricopiando gli zeri meno significativi ed il primo uno (meno significativo) e invertendo tutte le altre cifre



52

Altri esempi



53

Esempio

$p = 4$ [-8 .. 7]

- ❖ $\overline{1010} = 0110$ vale che
 $1010 + 0110 = 0000$ (con riporto di 1)

- ❖ $\overline{1000} = 1000$ **autocomplementate:**
dà luogo ad overflow se si cerca di complementare
-8

54

Ora ... più semplicemente

111110 → i?

Si può fare:

Complemento: 000010
 Calcolo l'intero: 2
 Lo nego: -2

55

Operazioni

- ❖ Complementazione
- ❖ **Somma**
- ❖ Sottrazione
- ❖ Moltiplicazione
- ❖ Divisione

56

Somma

Indipendentemente dai segni degli operandi si usa lo stesso algoritmo dei naturali pur di troncare il risultato su p cifre disponibili → si dice modulo B^p

57

Esempi: $B=2, p=4$ $[-8 \dots 7]$

1 0 0 1		0 1 1 1	
1 0 0 1 +	- 7 +	0 1 1 1 +	7 +
1 0 0 1 =	- 7 =	0 1 1 1 =	7 =
0 0 1 0	2 NOK	1 1 1 0	- 2 NOK
1 1 1 1		1 1 1 1	
0 1 1 1 +	7 +	1 0 1 1 +	- 5 +
1 0 1 1 =	- 5 =	1 1 1 1 =	- 1 =
0 0 1 0	2 OK	1 0 1 0	- 6 OK

Non basta controllare r_p per determinare l'overflow

CONDIZIONE

di

OVERFLOW

$$r_p \neq r_{p-1}$$

58

Somma

Si può usare il sommatore visto per i naturali e controllare gli ultimi riporti per vedere se c'è overflow

59

Operazioni

- ❖ Complementazione
- ❖ Somma
- ❖ **Sottrazione**
- ❖ Moltiplicazione
- ❖ Divisione

60

Sottrazione

B=2, p =4 [-8..7]

$$\begin{array}{r}
 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ - \quad 4 \ - \\
 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ = \quad 7 \ = \\
 \hline
 \quad \quad \quad ? \quad \quad \quad -3
 \end{array}$$

somma + complementazione:
 $n1 - n2 = n1 + \overline{n2}$

61

Sottrazione (cont.)

$$\begin{array}{r}
 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ - \quad 4 \ - \\
 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ = \quad 7 \ = \\
 \hline
 \quad \quad \quad ? \quad \quad \quad -3
 \end{array}$$

Complemento: $0 \ 1 \ 1 \ 1 = 1 \ 0 \ 0 \ 1$

$$\begin{array}{r}
 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ + \\
 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ = \\
 \hline
 1 \ 1 \ 0 \ 1 \quad \quad \quad \text{OK}
 \end{array}$$

62

Operazioni

- ❖ Complementazione
- ❖ Somma
- ❖ Sottrazione
- ❖ Moltiplicazione
- ❖ Divisione

63

Moltiplicazione

1. In base ai segni dei fattori, determinare il segno del risultato
2. Complementare gli eventuali fattori negativi
3. Eseguire la moltiplicazione dei naturali così ottenuti
4. Complementare il risultato del passo precedente, se necessario

(esistono algoritmi + efficienti)

64

Esempio

$$\begin{array}{r}
 1 \ 0 \ 1 \ * \\
 0 \ 1 \ 1 \ = \\
 \hline
 \quad \quad \quad ? \quad \quad \quad 0 \ 1 \ 1 \ * \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \ 1 \ 1 \ = \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \ 1 \ 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \ 1 \ 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \ 0 \ 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1
 \end{array}$$

Complementare il risultato
 Complementare il primo fattore

0 0 1 0 0 1

estendere su 6 cifre
 e dopo complementare

Risultato:
 1 1 0 1 1 1

65

Operazioni

- ❖ Complementazione
- ❖ Somma
- ❖ Sottrazione
- ❖ Moltiplicazione
- ❖ Divisione

66

Divisione

Simile alla moltiplicazione

67

Esempio

1 1 1 0 1 0 | 0 1 1

Complementare il risultato
Complementare il dividendo

```

    0 0 0 1 1 0 | 0 1 1
      0 1 1     | 1 0
      -----
    0 0 0 0
  
```

0 1 0
estendere su 3 cifre
e dopo complementare

Risultato:

1 1 0

68

Tabella riassuntiva

		I_{rapp}	Overflow	Complementaz.
Naturali		$[0 \dots 2^p - 1]$	$r_p = 1$	NO
	M&S	$[-(2^{p-1}-1) \dots 2^{p-1}-1]$	$r_{p-1} = 1$	Modificare solo il bit di segno
Interi	CB	$[-2^{p-1} \dots 2^{p-1}-1]$ (1 sola rapp. dello zero)	$r_p \neq r_{p-1}$	$\frac{00100}{11100} =$

69

Un'altra tabella riassuntiva

	Nat	M&S	CBase		Nat	M&S	CBase
0000	0	0	0	1000	8	-0	-8
0001	1	1	1	1001	9	-1	-7
0010	2	2	2	1010	10	-2	-6
0011	3	3	3	1011	11	-3	-5
0100	4	4	4	1100	12	-4	-4
0101	5	5	5	1101	13	-5	-3
0110	6	6	6	1110	14	-6	-2
0111	7	7	7	1111	15	-7	-1

70

Esercizi

... home page

71

Esercizio

Sia data la seguente sequenza di bit:

$A = 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1$

Se tale sequenza è la rappresentazione di un numero intero e la macchina usa la rappresentazione in complemento alla base, ricavare tale numero.

Su tre bit $101 = -3$

Per la propagazione del segno $A = -3$

72

Esercizio

Siano date le seguenti sequenze di bit:

A = 1001
B = 0100
C = 0100

Supponendo che tali sequenze siano la rappresentazione di tre numeri a, b, c , ricavare tali numeri nei seguenti due casi:

1. a, b, c sono numeri naturali;
2. a, b, c sono numeri interi e la macchina usa la rappresentazione in complemento alla base.

Sapendo di avere a disposizione solo 4 bit dire, motivando la risposta, se nei due casi sopra citati, è vera la seguente affermazione:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

73

Soluzione: naturali

$a = 9$ $b = 4$ $c = 4$

OVERFLOW

Somma

$(A + B) + C$

$$\begin{array}{r} \boxed{0} \ 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ + \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \boxed{1} \ 1 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ + \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$$

$A + (B + C)$

$(A + B) + C =$

$A + (B + C)$

$$\begin{array}{r} \boxed{0} \ 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ + \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \boxed{1} \ 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ + \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ = \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$$

74

Soluzione: interi

$a = -7$ $b = 4$ $c = 4$

Somma

$(A + B) + C$

$$\begin{array}{r} \boxed{0} \ \boxed{0} \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ + \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \boxed{1} \ \boxed{1} \ 0 \ 0 \ \text{OK} \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ + \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$$

$A + (B + C)$

$$\begin{array}{r} \boxed{0} \ \boxed{1} \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ + \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array} \qquad \text{OVERFLOW}$$

$(A + B) + C \neq$

$A + (B + C)$

75

Osservazione

Rappresentazione finita:

proprietà associativa non vale

76

Siano date, in base due, le seguenti sequenze di bit:

A = 00110101
B = 0110
C = 0111

Esercizio

Supponendo che tali sequenze siano la rappresentazione di tre numeri a, b, c , ricavare tali numeri nei seguenti due casi:

1. a, b, c sono numeri naturali.
2. a, b, c sono numeri interi e la macchina usa la rappresentazione in modulo e segno.

Eseguire, solo nel secondo caso sopra citato, l'operazione:

$$B - (-A / -C)$$

sapendo di avere a disposizione solo 4 bit per il risultato e per il quoziente della divisione.

Soluzione

Naturali & interi

$a = 53$
 $b = 6$
 $c = 7$

78

Soluzione (cont.)

Operazione: $B - (-A/-C)$ in modulo e segno

$-A/-C$: lavoriamo sui moduli

$$\begin{array}{r} 0110101 \quad | \quad 111 \\ \underline{111} \\ 1100 \\ \underline{111} \\ 1011 \\ \underline{111} \\ 100 \end{array}$$

$-A/-C = R = 0111$

$B-R$: lavoriamo sui moduli, $|R| > |B|$ allora dobbiamo eseguire $R-B$ ed il risultato avrà segno negativo:

$$\begin{array}{r} 111 \\ \underline{110} \\ 001 \end{array}$$

$B - (-A/-C) = 1001$

Non si è verificato overflow

79

Esercizio

Siano date le seguenti sequenze di bit:

$A = 10110001$

$B = 1100$

$C = 0110$

Sapendo che tali sequenze rappresentano tre numeri interi a , b e c , rispettivamente e che la macchina usa la rappresentazione in complemento alla base:

- ricavare a , b e c ;

- eseguire, in aritmetica binaria, l'operazione

$$B - (A/C)$$

sapendo di avere a disposizione solo 4 bit per il risultato e per il quoziente della divisione.

80

Soluzione

Il bit più significativo di A è 1, quindi a è negativo.

$$\overline{A} = 01001111$$

$$a = - (2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) = -79$$

Il bit più significativo di B è 1, quindi b è negativo.

$$\overline{B} = 0100$$

$$b = -2^2 = -4$$

Il bit più significativo di C è 0, quindi c è positivo,

$$c = 2^2 + 2^1 = 6$$

81

Soluzione (cont.)

Per calcolare (A/C) , calcoliamo $\overline{A}/C = 1101$

$$\begin{array}{r} 01001111 \quad | \quad 0110 \\ \underline{110} \\ 111 \\ \underline{110} \\ 00111 \\ \underline{110} \\ 001 \end{array}$$

Il risultato non è rappresentabile su 4 bit in complemento alla base (il quoziente deve essere positivo, mentre il primo bit è negativo).

82