

# Rappresentazione dei numeri

Antonella Santone

Anno Accademico 2008/2009

1

# Rappresentazione dei numeri

❖ Naturali

❖ Interi

❖ Reali

2

# Naturali $\mathbb{N}$ (unsigned)

❖  $0 \in \mathbb{N}$

❖ se  $n \in \mathbb{N} \rightarrow \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$

❖  $\mathbb{N}$  non ha altri elementi

3

# Elaboratori: rappresentazione finita

$n \in \mathbb{N}$

$\rho(n)$  rappresentazione finita di simboli

## Proprietà auspicabili

1.  $n \neq m \rightarrow \rho(n) \neq \rho(m)$

due numeri diversi  $\rightarrow$  due rappresentazioni diverse

2.  $\forall n \exists! \rho(n)$

per ogni numero esiste ed è unica la sua rappresentazione

4

# Rappresentazione posizionale

$B$  = base

$A = \{0, \dots, B-1\}$  = cifre

$p$  = numero di cifre = lunghezza della sequenza

$I_{\text{rapp}} = [0 \dots B^p - 1]$  intervallo

$|I_{\text{rapp}}| = B^p$  cardinalità

5

# Rappresentazione decimale

$B = 10$

$A = \{0, \dots, 9\}$

$p = 3$

$I_{\text{rapp}} = [0 \dots 999]$  intervallo

$|I_{\text{rapp}}| = 10^3$  cardinalità

6

## Posizionale?

253

145

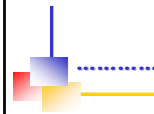
cifre hanno un significato diverso a seconda della posizione

$$s = c_{p-1} \dots c_0 \quad c_i \in A$$

cifra + significativa

cifra - significativa

7



esistono anche altre rappresentazioni

8

## Rappresentazione additiva: i numeri romani

Nei numeri romani ogni simbolo ha un valore fisso

$$X = 10$$

$$V = 5$$

$$I = 1$$

$$III \rightarrow 3$$

9

## Due problemi

1. Data una stringa di simboli, che numero naturale rappresenta?

(conversione da una base B alla base decimale)



2. Dato un numero naturale, come si rappresenta?

(conversione dalla base decimale in una base B)

10

## Primo problema

$$s = c_{p-1} \dots c_0_B \rightarrow n?$$

$$1345_{10} \rightarrow n?$$

$$n = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \cdot B^i = c_{p-1} \cdot B^{p-1} + \dots + c_1 \cdot B^1 + c_0$$

qualunque sia la base B

$$c_i \in A$$

11

## Rappresentazione decimale

$$B = 10$$

$$A = \{0, \dots, 9\}$$

$$p = 3$$

$$n = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \cdot B^i$$

$$s = 253_{10}$$

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^2 c_i \cdot 10^i = c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \\ &= 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \\ &= 253 \end{aligned}$$

12

## Rappresentazione binaria

$$B = 2$$

$$A = \{0, 1\}$$

$$p = 3$$

bit (da **BI**nary **diGI**T)

bit =	0 oppure 1		
Byte =	8 bit		
KiloByte (KB) =	$2^{10}$ Byte = 1024 Byte	~	$10^3$ Byte
MegaByte (MB) =	$2^{20}$ Byte = 1048576 Byte	~	$10^6$ Byte
GigaByte (GB) =	$2^{30}$ Byte	~	$10^9$ Byte
TeraByte (TB) =	$2^{40}$ Byte	~	$10^{12}$ Byte

13

## Rappresentazione binaria (cont.)

$$B = 2$$

$$A = \{0, 1\}$$

$$p = 3$$

$$I_{\text{rapp}} = [0 \dots 7]$$

$$|I_{\text{rapp}}| = 2^3 = 8$$

uno uno zero

000  
001  
010  
011  
100  
101  
110  
111

14

## Esempio

$$n = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \cdot B^i$$

Consideriamo la stringa 110 di bit.  
Quale numero naturale rappresenta?

$$p = 3$$

1	1	0
$c_2$	$c_1$	$c_0$

$$n = \sum_{i=0}^2 c_i \cdot 2^i = c_2 \cdot 2^2 + c_1 \cdot 2^1 + c_0$$

$$= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0$$

$$= 4 + 2 + 0$$

$$= 6$$

15

## Conversione: binario $\rightarrow$ decimale

representazione binaria	numero naturale (decimale)
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7



basta applicare  
 $n = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \cdot B^i$

16

## Due problemi

1. Data una stringa di simboli, che numero naturale rappresenta?  
(conversione da una base B alla base decimale)

2. Dato un numero naturale, come si rappresenta?  
(conversione dalla base decimale in base B)



17

## Secondo problema

Come calcolare i  $c_i$  della stringa?

$$n \in \mathbb{N} \rightarrow \rho_B(n)$$

Esempio

$$n = 6 \rightarrow \rho_2(6)$$



18

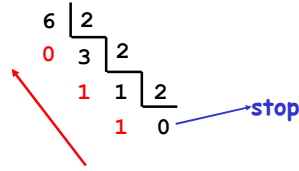
## Conversione: decimale → base B

Si calcolano i resti delle divisioni per B

19

## Conversione: decimale → binario

Si calcolano i resti delle divisioni per 2



Divisione	Quoziente	Resto
6:2	3	0
3:2	1	1
1:2	0	1

$$p_2(6) = 110_2$$

20

## Motivazione

$$\begin{array}{r} n \\ r \\ q \end{array} \Big| \begin{array}{r} B \\ q \end{array}$$

$$\begin{aligned} n &= B \cdot q_0 + r_0 & r_0 < B \\ q_0 &= B \cdot q_1 + r_1 & r_1 < B \\ q_1 &= B \cdot q_2 + r_2 & r_2 < B \text{ \& } q_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= B \cdot (B \cdot q_1 + r_1) + r_0 \\ &= B^2 \cdot q_1 + B \cdot r_1 + r_0 \\ &= B^2 \cdot (B \cdot q_2 + r_2) + B \cdot r_1 + r_0 \\ &= \cancel{B^3} \cdot q_2 + B^2 \cdot r_2 + B \cdot r_1 + r_0 \end{aligned}$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ c_2 & c_1 & c_0 \end{array}$

21

## Esempio: base 2

$$\begin{aligned} B &= 2 \\ A &= \{0, 1\} \end{aligned}$$

Esempio

$$12_{10} = ?_2$$

$$12_{10} = 1100_2$$

Servono 4 bit

Divisione	Quoziente	Resto
12:2	6	0
6:2	3	0
3:2	1	1
1:2	0	1

22

## Osservazione

Quanti bit mi servono per codificare N oggetti?

$$\begin{aligned} B &= 2 \\ A &= \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \\ |I_{\text{rapp}}| &= 2^P \end{aligned}$$

$$p = \lceil \log_2 N \rceil$$

intero  
superiore

23

## Esercizio

Quanti bit mi servono per rappresentare 18?

5

$$18_{10} = 10010_2$$

24

## Altre rappresentazioni usate

- ❖ Rappresentazione ottale
- ❖ Rappresentazione esadecimale

Utili per rappresentare sinteticamente i valori binari: la rappresentazione binaria è quella usata nei calcolatori, ma per noi umani è abbastanza scomoda da usare, perché numeri anche non grandissimi vengono rappresentati da stringhe di simboli piuttosto lunghe

25

## Rappresentazione ottale

$$B = 8$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

### Esempio

$$725_8$$

$$= 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0$$

$$= 469_{10}$$

26

## Rappresentazione esadecimale

$$B = 16$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

### Esempio

$$B7F_{16}$$

$$= 11 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$$

$$= 2943_{10}$$

27

## Tabella riassuntiva

Decimale	Binario	Ottale	Esadecimale
0	0000	00	0
1	0001	01	1
2	0010	02	2
3	0011	03	3
4	0100	04	4
5	0101	05	5
6	0110	06	6
7	0111	07	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

28

## Esercizi

1. Dato il numero naturale  $44_{10}$  rappresentarlo in base 2, 5, 8 e 16

2. Date le seguenti stringhe:

$$3BA_{16}$$

$$1110_2$$

$$271_8$$

Quali numeri naturali rappresentano?

29

## Soluzione: 1.

$$44_{10} = 101100_2$$

Divisione	Quoziente	Resto
44:2	22	0
22:2	11	0
11:2	5	1
5:2	2	1
2:2	1	0
1:2	0	1



30

### Soluzione: 1.

$$44_{10} = 134_5$$

Divisione	Quoziente	Resto
44:5	8	4
8:5	1	3
1:5	0	1

31

### Soluzione: 1.

$$44_{10} = 54_8$$

Divisione	Quoziente	Resto
44:8	5	4
5:8	0	5

$$44_{10} = 2C_{16}$$

Divisione	Quoziente	Resto
44:16	2	12 (C <sub>16</sub> )
2:16	0	2

32

### Soluzione: 2.

$$3BA_{16} = 3 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 10 = 954$$

$$1110_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 = 14$$

$$271_8 = 2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 1 = 185$$

33

### Esercizio

Dire se esiste una base  $x$  tale che:

$$37A_x = 1108_{10}$$

34

### Soluzione

Risolvere l'equazione

$$3 \cdot x^2 + 7 \cdot x^1 + 10 = 1108$$

$$3 \cdot x^2 + 7 \cdot x^1 - 1098 = 0$$

$$x = 18$$

35

### Esercizio

La seguente affermazione è vera?

$$1376_7 = 545_{10}$$

1376<sub>7</sub> non può essere una stringa in base 7

36

## Approfondimento

37

## Casi particolari di conversione

$$B_1 \text{ -----} \rightarrow B_2$$

1.  $B_1 = B_2^k$

2.  $B_2 = B_1^k$

38

$$B_1 = B_2^k$$

Far esplodere ogni cifra della rappresentazione in base  $B_1$  nelle corrispondenti  $k$  cifre della rappresentazione in base  $B_2$

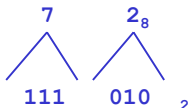
$$B_1 \text{ -----} \rightarrow B_2$$

$$B_1 = 8$$

$$k = 3$$

$$B_2 = 2$$

$72_8 \text{ -----} \rightarrow$  rappresentazione in base 2?



39

## Casi particolari di conversione

$$B_1 \text{ -----} \rightarrow B_2$$

1.  $B_1 = B_2^k$

2.  $B_2 = B_1^k$

40

$$B_2 = B_1^k$$

Raggruppare a  $k$  a  $k$  le cifre della rappresentazione in base  $B_1$  e convertirle in una sola cifra in base  $B_2$

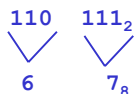
$$B_1 \text{ -----} \rightarrow B_2$$

$$B_1 = 2$$

$$k = 3$$

$$B_2 = 8$$

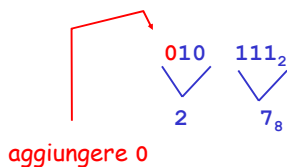
$110111_2 \text{ -----} \rightarrow$  rappresentazione in base 8?



41

## ... altro esempio

$10111_2 \text{ -----} \rightarrow$  rappresentazione in base 8?



42

## Esercizi

Si consideri il numero naturale 27 in base 10.

Determinare la sua rappresentazione nelle seguenti basi:

$$B = 2$$

$$B = 8$$

$$B = 16$$

43

## Soluzione: 27 in base 2

Base 2

Divisione	Quoziente	Resto
27:2	13	1
13:2	6	1
6:2	3	0
3:2	1	1
1:2	0	1

11011<sub>2</sub>

44

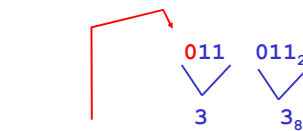
## Soluzione: 27 in base 8

So che 27 in base 2 è: 11011<sub>2</sub>

$$8 = 2^3$$

Raggruppare a 3 a 3 le cifre della rappresentazione in base 2

Base 8



aggiungere 0

33<sub>8</sub>

45

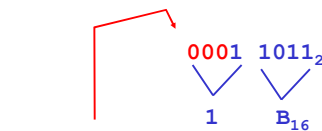
## Soluzione: 27 in base 16

So che 27 in base 2 è: 11011<sub>2</sub>

$$16 = 2^4$$

Raggruppare a 4 a 4 le cifre della rappresentazione in base 2

Base 16



aggiungere 0

1B<sub>16</sub>

46

## Esercizio

Data la seguente stringa:

37A<sub>16</sub>

Quale numero naturale rappresenta e quale è la sua rappresentazione in base 2?

47

## Soluzione

$$37A_{16} = 3 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 10 = 890$$

Base 2

$$16 = 2^4$$

Esplodere le cifre



001101111010<sub>2</sub>

48

## Proprietà della rappresentazione posizionale

- ❖ Potenza ennesima:  $B^n$
- ❖ Max numero rappresentabile con  $p$  cifre
- ❖ Moltiplicazione:  $n \cdot B$
- ❖ Moltiplicazione:  $n \cdot B^s$
- ❖ Divisione:  $n/B$
- ❖ Divisione:  $n/B^s$

49

## Potenza ennesima: $B^n$

$$B^n = \underbrace{10 \dots 0}_n$$

### Esempio

$$2^4 = 10000_2$$

$$10^3 = 1000_{10}$$

50

## Max numero con $p$ cifre: $B^p - 1$

$$\begin{aligned} \max &= \sum_{i=0}^{p-1} c_i \cdot B^i = \sum_{i=0}^{p-1} (B-1) \cdot B^i = (B-1) \sum_{i=0}^{p-1} B^i \\ &= (B-1) \frac{B^p - 1}{(B-1)} \end{aligned}$$

Progressione geometrica di ragione  $B$

### Esempio

$$B = 10$$

$$B = 2$$

$$p = 3$$

$$p = 3$$

$$\max = 999_{10}$$

$$\max = 111_2$$

51

## Moltiplicazione: $n \cdot B$

- ❖ una posizione in più
- ❖ scalare verso sinistra ed inserire uno zero nella posizione meno significativa

$$\begin{aligned} \rho(n) &= c_{p-1} c_{p-2} \dots c_1 c_0 \\ \rho(n \cdot B) &= c_p c_{p-1} c_{p-2} \dots c_1 c_0 \end{aligned}$$

### Esempio

$$B = 10$$

$$B = 2$$

$$p = 3$$

$$p = 3$$

$$321_{10} \cdot 10_{10} = 3210_{10} \quad 11_2 \cdot 10_2 = 110_2$$

52

## Moltiplicazione: $n \cdot B^s$

Traslare di  $s$  passi la rappresentazione verso sinistra ed inserire  $s$  zeri da destra

53

## Divisione: $n/B$

- scartare la cifra meno significativa
- scalare verso destra
- inserire uno zero nella posizione più significativa (rappresentabile con una cifra in meno)

### Esempio

$$B = 10$$

$$B = 2$$

$$p = 3$$

$$p = 3$$

$$345_{10} / 10_{10} = 034_{10} \quad 101_2 / 10_2 = 010_2$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 10 \\ \hline 010 \end{array}$$

54

## Divisione: $n/B^s$

Traslare di  $s$  passi la rappresentazione verso destra ed inserire  $s$  zeri da sinistra

55

## Aritmetica binaria

Operazioni sui naturali

56

## Operazioni: base 2

### Somma

- ❖ Sottrazione
- ❖ Moltiplicazione
- ❖ Divisione

57

## Somma

Viene eseguita incolonnando i numeri e sommando tra loro i bit incolonnati, partendo dai meno significativi, in ordine di peso crescente

58

## Somma: $01101 + 01011 = ?$

$B = 2$	a	b	r	s	$r'$
	0	0	0	0	0
$p = 5$	0	0	1	1	0
$I_{rapp} = [0 \dots 31]$	0	1	0	1	0
	0	1	1	0	1
$0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$ decimale	1	0	0	1	0
$0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 +$ $13 +$	1	0	1	0	1
$0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 =$ $11 =$	1	1	0	0	1
$1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$	1	1	1	1	1

59

## Overflow

$B = 2$   
 $p = 3$   
 $I_{rapp} = [0..7]$

$1 \ 0 \ 1$	decimale
$1 \ 0 \ 1 +$	$5 +$
$1 \ 0 \ 1 =$	$5 =$
$0 \ 1 \ 0$	$1 \ 0$

**Overflow**  
 $r_p = 1$

60

### Rete che produce il valore di s

a	b	r	s	r'
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

61

### Rete che produce il valore di r'

a	b	r	s	r'
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

62

### Sommatore a p bit

**Overflow**  
 $r_p = 1$

63

### Operazioni: base 2

- ❖ Somma
- ❖ **Sottrazione**
- ❖ Moltiplicazione
- ❖ Divisione

64

### Sottrazione: a-b

Viene eseguita incolonnando i numeri e sottraendo tra loro i bit incolonnati, partendo dai meno significativi, in ordine di peso crescente

0	1	1	1	1	
1	0	1	0	0	-
0	0	1	1	1	=
0	1	1	0	1	

a	b	p	s	p'
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

65

### Sottrattore ...

... una rete diversa, detta sottrattore, realizzerà la differenza tra due numeri senza segno

66



## Esempio

$$\begin{array}{r} 1010 \overline{) 11} \\ \underline{11} \phantom{0} \\ 0100 \\ \underline{11} \\ 001 \end{array}$$

Sistema decimale

$$10 \overline{) 3} \\ \underline{1} \phantom{0} \\ 1 \phantom{0} \\ 3$$

73

## Esempio

Dividendo: su 8 bit

Divisore, quoziente e resto: su 4 bit

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11010} \\ \underline{1010} \phantom{0} \\ 01011 \\ \underline{1010} \phantom{0} \\ 0001101 \\ \underline{1010} \\ 0011 \end{array}$$

OVERFLOW

74

## Osservazione

Gli algoritmi proposti per la risoluzione di moltiplicazioni e divisioni non necessariamente sono i più efficienti; in pratica vengono spesso usati altri algoritmi, che non tratteremo in questo corso.

75

## Utile: potenze di 2

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 \\ 2^1 &= 2 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^4 &= 16 \\ 2^5 &= 32 \\ 2^6 &= 64 \\ 2^7 &= 128 \\ 2^8 &= 256 \\ 2^9 &= 512 \\ 2^{10} &= 1024 \end{aligned}$$

76

## Esercizi

... sui naturali

77

## Esercizio

Siano date le seguenti sequenze di bit su 8 bit:

$$A = 10000100$$

$$B = 11001100$$

Eeguire, in aritmetica binaria, le seguenti operazioni:

$$A+B$$

$$B-A$$

78

### Soluzione: A+B

A = 10000100  
B = 11001100

overflow

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \qquad \qquad \qquad 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ + \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ \hline 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

79

### Soluzione: B-A

A = 10000100  
B = 11001100

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ - \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ = \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

80

### Esercizio

Se la seguente somma è corretta

$$566 + 13 = 612$$

In quale base si sta lavorando??

81

### Soluzione

$$566 + 13 = 612$$

$$(5B^2 + 6B + 6) + (B + 3) = 6B^2 + B + 2$$

$$5B^2 + 7B + 9 = 6B^2 + B + 2$$

$$B^2 - 6B - 7 = 0$$

$$B = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2}$$

7  
~~1~~

82

### Esercizio

Siano date le seguenti sequenze di bit su 4 bit:

A = 1001  
B = 1101

Eseguire, in aritmetica binaria, le seguenti operazioni:

A\*B      risultato su 8 bit  
A/11      risultato su 2 bit

83

### Soluzione: A\*B

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ * \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ = \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array}$$

84

Soluzione: A/11

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ \underline{1\ 1} \\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \underline{1\ 1} \\ 0\ 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 1\ 1 \\ \underline{1\ 1} \end{array} \right.$$